Zahlensysteme

Das vom Menschen am häufigsten benutzte Zahlensystem ist das **dezimale Zahlensystem**. Wahrscheinlich benutzen wir es, weil wir zehn Finger haben und damit das Abzählen von Mengen sehr einfach ist.

- Das dezimale Zahlensystem ist aber **nicht das einzig mögliche Zahlensystem!**

Beschränken wir uns auf die **Menge der natürlichen Zahlen**. Jede natürliche Zahl kann die Basis eines Zahlensystems werden.

Aufbauvorschrift für ein Zahlensystem

$$\text{Zahl}_B = \sum_{n=0}^{n=max} Z_n * B^n$$

Eine Zahl der Basis **B** wird dadurch gebildet, dass Ziffern **Z** für **n** Stellen zusammengesetzt werden. Dabei bedeuten:

Eine Zahl der Basis **B** wird dadurch gebildet, dass Ziffern **Z** für **n** Stellen zusammengesetzt werden. Dabei bedeuten:

B, eine natürliche **Zahlenbasis** {1, 2, 3, 4, ...12, 15, 16, ...}
n, eine natürliche Zahl, die **Stelle der Ziffer** {0, 1, 2, ... }
Z_n, die **Ziffer an der Stelle n** {0, 1, ..., **B-1**}

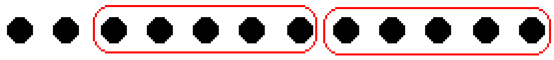
Beispiel: Die Darstellung der Zahl 142 im dezimalen Zahlensystem

Dezimales Zahlensystem (Basis = 10)		
Z(2)	Z(1)	Z(0)
1	4	2
$1* 10^2$	$4 * 10^1$	$2 * 10^0$
100	40	2

Umwandlung von dezimalen Zahlen in Zahlen eines anderen Zahlensystems

Als Beispiel soll die Zahl **12 (dezimal)** in eine **Zahl der Basis 5** (Fünfer Zahlensystem) umgewandelt werden.

Man kann sich dabei vorstellen, dass ein Bewohner eines anderen Planeten, mit nur 5 Ziffern-Symbolen (oder Fingern)eine Menge abzählt:



5^2 25

5^1 5

5^0 1

12 (Basis 10). ist ganzzahlig nicht durch 5^2 (25 dez.) oder durch höhere Potenzen von 5 zu teilen. Die größte Potenz von 5, durch die 12 noch teilbar ist, ist 5^0 (5).
Ganzzahlig passt 5 in 12 zweimal hinein und es verbleibt ein Rest von 2.

Daraus folgt: 12 dez. = 22 im Fünfer - Zahlensystem

gesprochen wird das, damit keine Missverständnisse aufkommen können:
zwei zwei zur Basis 5.

Zur Probe wandeln wir 22 (Basis 5) wieder in eine Zahl des dezimalen Zahlensystems um:

Fünfer Zahlensystem(Basis = 5)		
Z(2)	Z(1)	Z(0)
0	2	2
$0 * 5^2$	$2 * 5^1$	$2 * 5^0$
0	10	2

10 + 2 = 12. Die Umwandlung war also richtig.

Die Symbole der Zahlensysteme

Das Fünfer-Zahlensystem verfügt über **5 verschiedene Symbole**, die nach der Größe aufsteigend sortiert sind. Welche Symbole benutzt werden, ist prinzipiell unwesentlich. Da wir uns an die arabischen Zahlensymbole gewöhnt haben, ist es einfacher, diese Symbole zu verwenden.

Das Fünfer-Zahlensystem enthält damit die Symbole {0, 1, 2, 3, 4}. Die Fünf (5) kommt selbst als Symbol nicht vor. Sie ist die Basis des Zahlensystems. Das mag zunächst verwirrend erscheinen, kann aber z.B. beim Abzählen von Mengen klarer werden:

5^2	5^1	5^0
0	0	0
0	0	1
0	0	2
0	0	3
0	0	4
0	1	0
0	1	1
.	.	.
4	4	4

Im Fünfer-Zahlensystem wird nach den gleichen Regeln gezählt, wie im Dezimalsystem (Zehner-Zahlensystem). Im Dezimalsystem gibt es Einer (10^0), Zehner (10^1), Hunderter (10^2) usw. Zählen wir also (bei den Einern) bis 9, dann erfolgt beim nächsten Zählvorgang ein Übertrag in die nächsthöhere Stelle (Zehner) und die Einer beginnen wieder bei 0.

Duale Zahlen

Duale Zahlen (Binärzahlen) besitzen nur **zwei verschiedene Symbole**. Diese Symbole können einfach benutzt werden, um zwischen zwei Zuständen (wie Spannung und keine Spannung) unterscheiden zu können. Damit sieht eine Zählreihe der Binärzahlen folgendermaßen aus:

2^2	2^1	2^0
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Um eine Menge von 7 Elementen abzählen zu können, wird hier bereits eine dreistellige Binärzahl benötigt.

Umwandlung einer Zahl eines beliebigen Zahlensystems in Dezimalzahlen

Die Potenzschreibweise ermöglicht eine Umwandlung ohne großen Aufwand. Z.B. soll die Zahl 3402 (Basis 5) in eine Dezimalzahl umgewandelt werden:

Stellenwert der Ziffern	5^3	5^2	5^1	5^0
Dezimaler Wert	125	25	5	1
Ziffern	3	4	0	2
Ziffer * dezimaler Wert	375	100	0	2
Summe (Dezimalwert)	375 + 100 + 2 = 477			

Die Umwandlung einer Zahl **eines beliebigen Zahlensystems** in eine **Dezimalzahl** kann wie ein **Geschäftsprozess** beschrieben werden. Damit erhält man ein **Verfahren**, das eine **sichere Umwandlung** ermöglicht, wenn man es nur genau einhält.

In Textform könne man die Vorgehensweise etwa folgendermaßen beschreiben:

Gebe die Basis des Ausgangszahlensystems an.
Gebe die Zahl des Ausgangszahlensystems an.
Stelle die Summe (den Dezimalwert) auf 0.

Beginne bei der höchstwertigsten Ziffer bis zur letzten Ziffer:

Summiere: Ziffer * (Basis $^{\text{Stellenwert}}$)

Das Ergebnis ist die Dezimalzahl.

Als weiteres Beispiel soll die Zahl **100101101 (Basis 2)** in eine **Dezimalzahl** umgewandelt werden:

Stellenwert der Ziffern	$\mathbf{2^8}$	$\mathbf{2^7}$	$\mathbf{2^6}$	$\mathbf{2^5}$	$\mathbf{2^4}$	$\mathbf{2^3}$	$\mathbf{2^2}$	$\mathbf{2^1}$	$\mathbf{2^0}$
Dezimaler Wert	256	128	64	32	16	8	4	2	1
Ziffern	1	0	0	1	0	1	1	0	1
Ziffer * dezimaler Wert	256	0	0	32	0	8	4	0	1
Summe (Dezimalwert)	256 + 32 + 8 + 4 + 1 = 301								